

Couigé DS 4

Partie I : la machine à café.

1)- $D = 3\text{cm}$ et $a = 3\text{mm}$. Il y a donc un grand nombre de trous, que l'on peut évaluer en cherchant la surface de capsule comportant un trou. Si on regarde la cartouche:

• • • • • une surface $S = a^2$ possède en moyenne un trou, car chaque trou est partagé par 4 surfaces identiques $S = a^2$.

On trouve ainsi le nombre de trous N en écrivant le rapport suivant :

$$N = \frac{S_{\text{cartouche}}}{S} = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{a^2} = \pi \frac{D^2}{4a^2}$$

A.N.: $N = \pi \left(\frac{3 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \quad N = 78$

2)- $\varphi = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow \varphi = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{10} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

la vitesse moyenne du fluide dans chaque trou se déduit de φ :

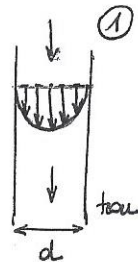
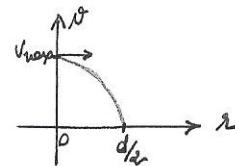
$$v_{\text{moy}} = \frac{q}{S_{\text{trou}}} = \frac{\frac{\varphi}{N}}{\pi \frac{d^2}{4}} \quad \text{où } q \text{ est le débit de café à travers un trou. } q = \frac{\varphi}{N}$$

A.N. $v_{\text{moy}} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{78 \cdot \pi \frac{(7 \cdot 10^{-5})^2}{4}} \quad v_{\text{moy}} = 16,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3) $Re = \frac{v_{\text{moy}} \cdot d}{\eta/\rho} \quad Re = \frac{16,7 \cdot 7 \cdot 10^{-5}}{10^{-3}/10^3} \quad Re = 1,2 \cdot 10^3$

On obtient Re inférieur à 2000. on peut donc en déduire que l'écoulement est laminaire dans chaque trou. Il sera donc possible dans la suite d'utiliser la loi de Poiseuille.

4)- le profil de vitesse est celui d'un écoulement de Poiseuille, c'est un profil parabolique.



5)- On obtient le débit q à travers un trou à l'aide du calcul suivant:

$$q = \int_{r=0}^{d/2} v(r) \cdot 2\pi r dr = \int_{r=0}^{d/2} \frac{d^2}{16\eta} \frac{\Delta P}{e} \left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right) 2\pi r dr$$

$$q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{d^2 \Delta P}{e} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{4r^4}{d^2} \right]_0^{d/2}$$

$$q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{d^2 \Delta P}{e} \left(\frac{d^2}{8} - \frac{d^2}{16} \right) = \frac{\pi}{8\eta} \frac{d^4 \Delta P}{e} \left(\frac{1}{16} \right)$$

$$q = \frac{\pi}{128\eta} \cdot d^4 \frac{\Delta P}{e} \quad (\text{loi de Poiseuille}).$$

6)- on souhaite avoir une vitesse moyenne dans chaque trou: $v_{\text{moy}} = 16,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

or: $v_{\text{moy}} = \frac{q}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{\frac{\pi}{128\eta} d^4 \frac{\Delta P}{e}}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{d^2}{32\eta} \frac{\Delta P}{e}$

Il faut donc la perte de charge suivante:

$$\Delta P = \frac{32\eta e}{d^2} v_{\text{moy}}$$

A.N.: $\Delta P = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{(7 \cdot 10^{-5})^2} \cdot 16,7$

$$\Delta P = 10,9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta P = 10,9 \text{ bar.}$$

L'ordre de grandeur ($\approx 11 \text{ bar}$) paraît cohérent. la pression à imposer au sommet est grande car le diamètre des trous est très petit et car le débit souhaité est quand même important pour ce dispositif.

On vérifie, pour les machines à café du commerce que la pression est généralement de 15 bar, mais peut aller jusqu'à 19 bar. (Nespresso!).

II. Seringue

1. q_v correspond à 1 mL injecté en 2 min, soit

$$q_v = \frac{10^{-6}}{2 \times 60} = 8,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

avec $q_v = V \times \pi \frac{d^2}{4} = V \times \pi \frac{D^2}{4}$

$$\rightarrow V = \frac{4q_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 8,3 \cdot 10^{-9}}{\pi (8,6 \cdot 10^{-3})^2} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad (\text{dans la seringue})$$

$$v = \frac{4q_v}{\pi d^2} = \frac{4 \times 8,3 \cdot 10^{-9}}{\pi (0,3 \cdot 10^{-3})^2} = 0,12 \text{ m/s} \quad (\text{dans l'aiguille})$$



On applique la relation de Bernoulli entre les points A et B le long d'une ligne de courant (fluide considéré comme parfait, incompressible, régime stationnaire supposé établi) :

$$P_0 + \cancel{\rho g z_A} + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_B + \cancel{\rho g z_B} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$P_B = P_0 + \frac{1}{2} \rho (v^2 - V^2) \approx P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (v^2 \gg V^2)$$

A.N

3. le piston est soumis, du côté liquide, à la pression P_B , et de l'autre côté, à la pression atmosphérique P_0 . le praticien doit donc exercer une force sur le piston au moins égale à :

$$F_0 = (P_B - P_0) S \quad S = \text{surface du piston} = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$F_0 = \frac{\pi D^2}{8} \rho v^2 = \frac{\pi D^2}{8} \rho \times \left(\frac{4q_v}{\pi d^2} \right)^2 = \frac{D^2}{d^4} \frac{q_v^2 \rho}{\pi} = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

force peu importante ! qui correspond à une faible différence de pression ($P_B - P_0$) :

$$P_B - P_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{10^3}{2} \times 0,12^2 = 7,2 \text{ Pa}$$

ce qui est logique car on n'a pas tenu compte des forces de viscosité contre lesquelles il faut lutter pour "pousser" le liquide dans l'aiguille.

①

4. le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est égal au gradient de vitesse dans une direction perpendiculaire à l'écoulement. Pour l'écoulement dans une canalisation de rayon a :

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dr} \quad \text{avec } r = \text{distance à l'axe}$$

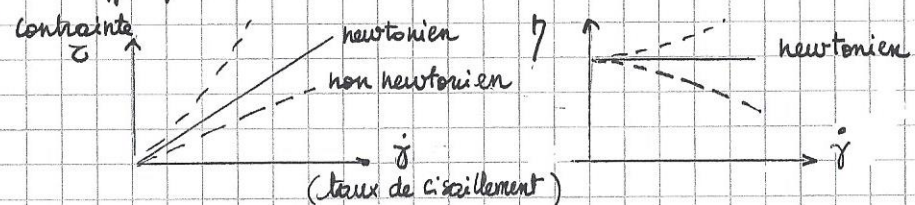
Si l'écoulement est laminaire, le profil de vitesse est parabolique :

$$v = v(r) \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = \frac{dv}{dr} \quad \text{est aussi } f(r)$$

mais l'estimation $\dot{\gamma} \approx \frac{v}{a}$, (où v est sans doute la

vitesse moyenne dans la canalisation) donne un bon ordre grandeur du taux de cisaillement et on a bien l'idée d'une variation de vitesse ($v=0$) sur une dimension transversale (le rayon).

5. Une fluide newtonien est un fluide dont la viscosité ne dépend pas de la contrainte de cisaillement appliquée ou du taux de cisaillement.



la viscosité dynamique est, par définition, la pente de la courbe τ en $f(\dot{\gamma})$

les solutions de l'hyaluronate de sodium ont une viscosité qui diminue quand le taux de cisaillement augmente : ce ne sont pas des fluides newtoniens mais des fluides rhéofluidifiants.

6. de l'aiguille : $\dot{\gamma}_a = \frac{v}{d/2} = \frac{0,12}{0,15 \cdot 10^{-3}} = 8,0 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$

de la seringue : $\dot{\gamma}_s = \frac{V}{D/2} = \frac{1,4 \cdot 10^{-4}}{4,3 \cdot 10^{-3}} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

7. On lit, sur le graphe de la figure 2 :

pour $\dot{\gamma}_a = 800 \text{ s}^{-1}$ (de l'aiguille) : $\eta_a \approx 500 \text{ mPa.s} = 0,5 \text{ Pl}$

• pour $\dot{\gamma}_s = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (dans la seringue) : cette valeur est inférieure à la plus petite valeur de l'axe des abscisses ($0,1 \text{ s}^{-1}$) mais l'énoncé précise que η est constante pour des taux inférieurs à $0,2 \text{ s}^{-1}$.

On se sert donc de la valeur lue sur le graphe pour ces taux :

$$\eta_s = 100\,000 \text{ mPa.s} = 100 \text{ Pl}$$

8. dans l'aiguille : $Re = \rho \frac{v d}{\eta_a} = 10^3 \times \frac{0,12 \times 0,3 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 7 \cdot 10^{-2}$

dans la seringue : $Re = \rho \frac{v D}{\eta_s} = 10^3 \times \frac{1,4 \cdot 10^{-4} \times 8,6 \cdot 10^{-3}}{100} \approx 1,2 \cdot 10^{-5}$

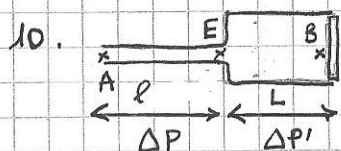
les écoulements sont laminaires ($Re < 2000$) et même rampants ($Re < 1$), comme on pouvait s'y attendre.

9. débit volumique $D_V = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta C}{L}$

ΔC = perte de charge entre 2 points distants de L

ΔC = Camont - Caval

valable pour un fluide newtonien, incompressible, en régime laminaire et stationnaire.



dans l'aiguille : $q_v = \pi \frac{(d/2)^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}$

$$\Delta P = \frac{8\eta q_v L}{\pi (d/2)^4} = \frac{8 \times 8,3 \cdot 10^{-9} \times 0,5 \times 8 \cdot 10^{-3}}{\pi \times (0,15 \cdot 10^{-3})^4}$$

$$\Delta P = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,7 \text{ bar}$$

dans la seringue :

$$\Delta P' = \frac{8\eta q_v L}{\pi (D/2)^4} = \frac{8 \times 8,3 \cdot 10^{-9} \times 100 \times 6,3 \cdot 10^{-3}}{\pi \times (4,3 \cdot 10^{-3})^4} = 4,3 \cdot 10^2 \text{ Pa}$$

11. le passage du corps de la seringue à l'aiguille est un rétrécissement, caractérisé par le rapport :

$$\frac{d}{D} = \frac{0,3}{8,6} = 0,035$$

On lit alors sur le diagramme : $K \approx 0,41$

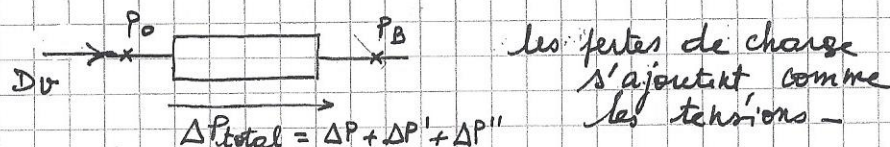
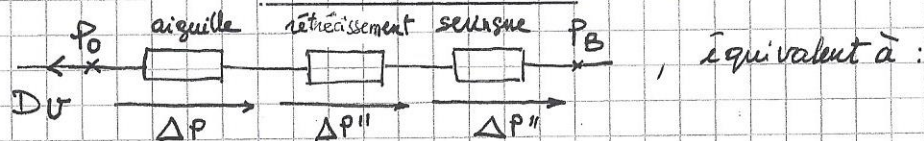
$$\text{et } \Delta P'' = 0,41 \times 10^3 \times \frac{(0,12)^2}{2} = 2,9 \text{ Pa}$$

L'écoulement étant très lent et à bas nombre de Reynolds, le rétrécissement introduit finalement une perte de charge très faible.

12. Analogies :

	électrique	hydraulique
flux :	I	D_V
cause :	ΔV	ΔC
résistance :	$R = \Delta V / I$	$R_h = \Delta P / D_V$

Circuit de 3 résistances en série (même débit) :



les pertes de charge s'ajoutent comme les tensions -

On peut remarquer que l'essentiel de la perte de charge est dans l'aiguille : $\Delta P \gg \Delta P', \Delta P''$

13. $F = (P_B - P_0) \times \pi \frac{D^2}{4} = \Delta P_{\text{total}} \times \pi \frac{D^2}{4} \approx \Delta P \times \pi \frac{D^2}{4}$

$$F = 1,7 \cdot 10^5 \times \pi \times \frac{(8,6 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 9,9 \text{ N}$$

ce qui correspond quand même à l'équivalent du poids d'une masse $m \approx 1 \text{ kg} \rightarrow m g \approx 10 \text{ N}$.

Partie III Force exercée par un fluide sur un obstacle.

1. a) - $\vec{v}(M) = \left(A - \frac{B}{r^2}\right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(A + \frac{B}{r^2}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta$

• Très loin de l'obstacle $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$

et $\vec{v} = A [\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta]$

car $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} = 0$

or $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ et $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$

$\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \vec{e}_x + (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_y$

$\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta = \vec{e}_x$

Finalement $v_0 \vec{e}_x = A \vec{e}_x$ d'où $A = v_0$.

• Pour $r = R$ on a : $\vec{v}(R) = \left(A - \frac{B}{R^2}\right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(A + \frac{B}{R^2}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta$

↳ Cependant, le fluide ne peut traverser l'obstacle donc la vitesse pour $r = R$ est une vitesse tangentielle colinéaire à $\vec{e}_\theta$.
La composante de cette vitesse $\vec{v}$ suivant $\vec{e}_r$ est nulle $\forall \theta$:

$\left(A - \frac{B}{R^2}\right) \cos \theta = 0 \Rightarrow A - \frac{B}{R^2} = 0 \quad B = AR^2$

or $A = v_0$ donc $B = v_0 R^2$.

Finalement : $\vec{v}(M) = v_0 \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$

b) les points d'arrêt sont des points de vitesse nulle:

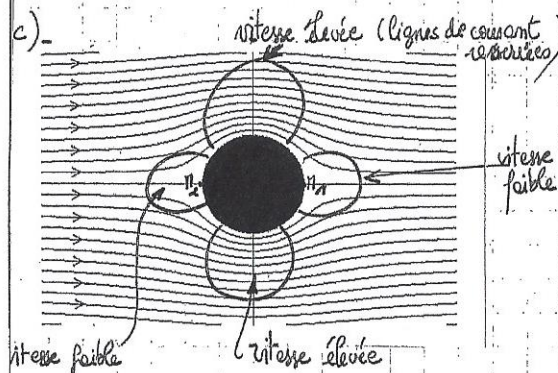
$\vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\begin{cases} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta = 0 \\ \text{et} \quad \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta = 0 \end{cases}$

donc $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou π .

et $\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta = 0 \Rightarrow 1 - \frac{R^2}{r^2} = 0 \Rightarrow r = R$

les points d'arrêt sont les 2 points : $M_1 (r=R, \theta=0)$ et $M_2 (r=R, \theta=\pi)$

c) -



on retrouve les points de vitesse élevée avec $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\vec{v}(\theta = \frac{\pi}{2}) = v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \vec{e}_\theta$
en particulier proches de l'obstacle : $\vec{v}(r=R, \theta = \frac{\pi}{2}) = -2v_0 \vec{e}_\theta$
 $\vec{v}(r=R, \theta = \frac{\pi}{2}) = 2v_0 \vec{e}_x$

les zones de basse vitesse sont les zones éloignées de l'obstacle où $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ et surtout les points près de l'obstacle avec $\theta = 0$ ou π
 $\vec{v}(r, \theta=0) = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \vec{e}_x$ et $\vec{v}(r, \theta=\pi) = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \vec{e}_x$

2. a) - la relation de Bernoulli entre un point à l'infini et un point près de l'obstacle donne en négligeant les variations d'énergie potentielle de pesanteur, sur une même ligne de courant:

$\frac{1}{2} \rho v_0^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho v^2(M) + P(r, \theta)$ d'où $P(r, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2(M))$

or $v^2(M) = v_0^2 \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)^2 \cos^2 \theta + \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^2 \sin^2 \theta \right]$

donc $P(r, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[1 - \cos^2 \theta - \frac{R^4}{r^4} \cos^2 \theta + \frac{2R^2}{r^2} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \frac{R^4}{r^4} \sin^2 \theta - \frac{2R^2}{r^2} \sin^2 \theta \right]$

$P(r, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[1 - 1 - \frac{R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right]$

$P(r, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \frac{R^2}{r^2} \left[2 \cos 2\theta - \frac{R^2}{r^2} \right]$

(conditions : fluide parfait, écoulement permanent, incompressible dans le seul champ de pression et de pesanteur, Bernoulli = conservation de la charge, c'est à dire de l'énergie mécanique unitaire)

b) Pour $r=R$ on obtient : $P(R, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 [2 \cos 2\theta - 1]$

ou $P(R, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 [1 - 4 \sin^2 \theta]$

(ou encore $P(R, \theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 [-3 + 4 \cos^2 \theta]$)

la force $d\vec{F}$ s'exerçant en M sur un élément ds est en tenant compte du fluide dans le hangar

$$d\vec{F} = -(P(R, \theta) - P_0) ds \vec{e}_r$$

$$d\vec{F} = -\left(\frac{1}{2} \rho v_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)\right) ds \vec{e}_r$$

A partir d'un certain angle θ_1 , $1 - 4 \sin^2 \theta < 0$ pour tout angle entre θ_1 et $\pi - \theta_1$, $d\vec{F}$ est de même sens que $\vec{e}_r$ la résultante risque d'être orientée vers le haut!

(Complément non demandé $\Rightarrow$ calcul de la résultante $\vec{F}$ et hors programme.)

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 (4 \sin^2 \theta - 1) R d\theta \cdot L \vec{e}_r \quad \text{car } ds = R d\theta \cdot L$$

la résultante $\vec{F}$ aura la direction de l'axe (Oy) en raison de la symétrie par rapport à (Oy) . on calcule donc F_y : $\vec{F} = F_y \vec{e}_y$

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dF_y \quad \text{avec} \quad dF_y = \frac{1}{2} \rho v_0^2 (4 \sin^2 \theta - 1) R d\theta \cdot L \sin \theta$$

$$dF_y = \frac{1}{2} \rho v_0^2 R L (4 - 4 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta$$

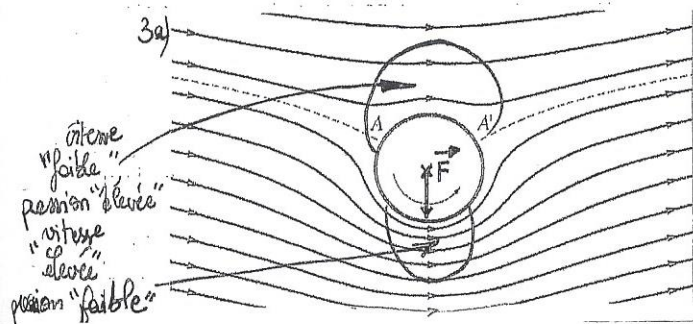
$$dF_y = \frac{1}{2} \rho v_0^2 R L (3 - 4 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho v_0^2 R L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 \sin \theta - 4 \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho v_0^2 R L \left([-3 \cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\frac{4}{3} \cos^3 \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho v_0^2 R L \left(+3 + 3 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \rho v_0^2 R L \frac{10}{3}$$

$$\vec{F} = \frac{5}{3} \rho v_0^2 R L \vec{e}_y \quad (\text{si le hangar n'est pas bien tenu il risque de décoller})$$



b) Effet Magnus

Applications:

- balles "brisées" au football
- balles "liftées" ou "coupées" au tennis.

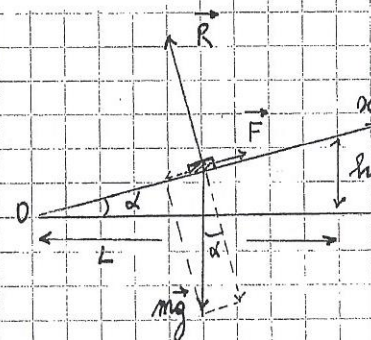
$\rightarrow$ trajectoires incurvées car soumises à cette force $\vec{F}$

Partie IV: Modélisation d'un dispositif expérimental

②

1.

A l'équilibre: $\sum \vec{F} = \vec{0}$



- la composante du poids // à Ox est égale à $\|F\|$

- la composante du poids $\perp$ à Ox est égale à $\|R\|$, réaction du support

2. A l'équilibre: $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$

Projection sur Ox : $F - mg \sin \alpha = 0$ avec $F(x_e) = k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^m$

$$k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^m - mg \sin \alpha = 0$$

$$\text{si } \alpha \text{ petit: } \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{h}{L}$$

$$\rightarrow k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^m - mg \frac{h}{L} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x_e = x_0 \left(\frac{kL}{mgh} \right)^{1/m}}$$

3. la relation précédente s'écrit aussi:

$$h = \frac{kL}{mg} \times \frac{1}{\left(\frac{x_e}{x_0} \right)^m}$$

$$\text{ou} \quad \ln h = \ln \left(\frac{kL}{mg} \right) - m \ln \frac{x_e}{x_0}$$

la courbe $\ln h = f \left(\ln \frac{x_e}{x_0} \right)$ est une droite:

- de pente $= -m$

- d'ordonnée à l'origine $= \ln \frac{kL}{mg}$

$$\text{ou encore} \quad \ln \frac{x_e}{x_0} = \frac{1}{m} \ln \frac{kL}{mg} - \frac{1}{m} \ln h$$

On peut donc tracer aussi $\ln \frac{x_e}{x_0} = f(\ln h)$. (voir courbe page suivante)

Par régression linéaire on obtient: $m = 4$ et $\frac{1}{4} \ln \frac{kL}{mg} = 3,33$

$$\text{soit } k_e = 2,5 \cdot 10^6 \text{ N}$$

4. $E_p = E_{p(\text{pesanteur})} + E_{p(F)}$

• $E_{p(\text{pesanteur})} = mgx \sin \alpha + cte$

avec $\sin \alpha = \frac{h}{L}$ et $x \text{ tend } 0 \rightarrow E_{p(\text{pesanteur})} = mgx \frac{h}{L} + cte$

• $E_{p(F)}$ telle que: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{p(F)} = -\frac{dE_{p(F)}}{dx} \vec{u}_x$

$k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n = -\frac{dE_{p(F)}}{dx}$

$E_{p(F)} = -k x_0^n \int \frac{dx}{x^n} = -k x_0^n \frac{x^{1-n}}{1-n} + cte = \frac{k x_0^n}{n-1} x^{1-n} + cte$

On a alors: $E_p = mgx \frac{h}{L} + \frac{k x_0^n}{n-1} x^{1-n} + cte$

avec $mg \frac{h}{L} = k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n$ d'après la question 2., on obtient:

$E_p = k x \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n + \frac{k x_0^n}{n-1} x^{1-n} + cte$

5. Développement de Taylor: $E_p(x) \approx E_p(x_e) + \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_e} (x - x_e)^2$

$\frac{dE_p}{dx} = k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n + \frac{k x_0^n}{n-1} (1-n) x^{-n} = k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n - k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n$

$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_e} = k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n - k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n = 0$ (cohérent $\rightarrow$ minimum de E_p en $x = x_e$)

$\frac{d^2E_p}{dx^2} = +k x_0^n n x^{-n-1}$

$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_e} = k n \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}$

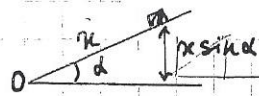
d'où $E_p(x) \approx \frac{E_p(x_e)}{cte} + \frac{1}{2} k n \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}} (x - x_e)^2$

$K = k n \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}$

6. La résultante des forces appliquées à la dérive de l'énergie potentielle totale.

On peut alors en déduire $\vec{F}$:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p(x) = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x$



soit $\vec{F} = -k (x - x_e) \vec{u}_x$ avec $k = k n \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}$

Il s'agit bien d'une force de rapp'l élastique ($\propto (x - x_e)$)

7. la 2ème loi de Newton appliquée à la masse m, donne:

$-k (x - x_e) \vec{u}_x = m \ddot{x} \vec{u}_x$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} x_e$

Oscillations harmoniques de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k n \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}}}$

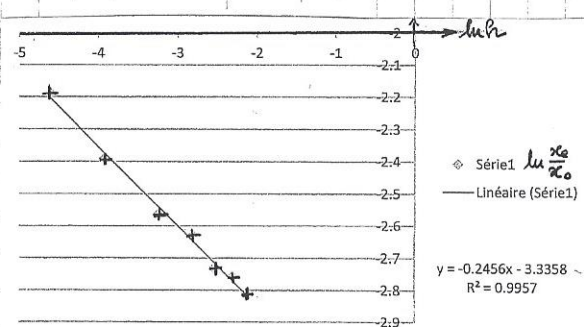
avec l'expression de x_e obtenue à la question 15., on a la relation entre T et h:

$T = 2\pi \left[\frac{m}{k n x_0^n} \times x_0^{n+1} \times \left(\frac{k L}{m g h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]^{1/2}$

soit $T \propto (h)^{-\frac{n+1}{2n}}$

on peut mesurer la période T des petites oscillations pour différentes valeurs de h, puis tracer la courbe $\ln T$ en $f(\ln h)$.

la pente de la droite obtenue est $-\frac{n+1}{2n}$, on en déduit alors n.



question 3.

courbe $\ln \frac{x_e}{x_0} = f(\ln h)$

← régression linéaire.